

Multiplicative-Invariant Geometry of the Universe

A Geometric Principle of Universal Mass Generation

Abstract

This work proposes a new multiplicative-invariant geometric relation connecting local mass and the global structure of the universe.

We show that

$$M / M_T = r_0 / R$$

or equivalently,

$$M \cdot R = M_T \cdot r_0$$

defines a universal geometric relationship linking local and global physical structures.

To interpret this relation, we propose the **Complex Quaternionic Spherical Oscillator (CQSO)** as the minimal ontological structure of physical existence. Combining multiplicative invariance with time-independent phase equilibrium, we derive a universal exponential mass-generation equation.

Within this framework, the electron, proton, and neutron are described by the same universal generation equation and are interpreted as different geometrically selected condensation modes. Mass is therefore understood as a geometric eigenvalue selected by time-independent phase equilibrium.

The detailed mathematical derivations, numerical validations, and particle-eigenmode calculations are presented in Supplementary Information.

1. Introduction

1.1 Background

Modern physics has achieved remarkable success by describing natural phenomena through forces, fields, spacetime geometry, and quantum states.

However, these approaches do not directly address a more fundamental question:

What universal geometric principle allows stable physical existence to emerge and remain self-consistent?

Within the COD framework, physical existence is not regarded as an object generated along the time axis.

Instead, existence is interpreted as a self-organized geometric structure established through time-independent phase equilibrium, while physical laws are viewed as observable manifestations of this underlying geometric organization.

1.2 Principal Discovery

The principal discovery of the present work is the existence of the universal multiplicative-invariant relation

$$M / M_T = r_0 / R$$

or equivalently,

$$M \cdot R = M_T \cdot r_0.$$

This relation connects local mass and the global universe through a common geometric ratio.

From this relation, the global closure equation

$$c^2 = 2\sqrt{3} G M_T / R$$

naturally follows.

Together with the Complex Quaternionic Spherical Oscillator and the principle of time-independent phase equilibrium, this relation provides the foundation for a universal mass-generation framework.

The numerical verification of multiplicative invariance is presented in Supplementary Information 1.

2. Multiplicative-Invariant Geometry

2.1 Global–Local Correspondence

Within COD, every mass satisfies

$$M / M_T = r_0 / R$$

or

$$M \cdot R = M_T \cdot r_0.$$

Hence,

$$r_0 = (R / M_T) M.$$

Here,

- M denotes the local mass,
- M_T the global reference mass,
- R the global reference radius, and
- r_0 the intrinsic phase radius.

This relation indicates that mass and space are connected through a common multiplicative-invariant geometry.

2.2 Global Closure

The multiplicative-invariant geometry satisfies the global closure relation

$$c^2 = 2\sqrt{3} G M_T / R.$$

Accordingly,

$$M_T / R = c^2 / (2\sqrt{3} G).$$

Within the COD framework,

the speed of light c determines the global spatial scale,

whereas the gravitational constant G determines the corresponding global mass scale.

Table 1. Representative Verification of Multiplicative-Invariant Geometry in the Solar System

Applying the COD global reference pair (M_T_COD , R_COD) demonstrates that representative Solar-System bodies satisfy the universal multiplicative-invariant relation

$$M / M_T_COD = r_0 / R_COD$$

within numerical precision.

Body	Mass M (kg)	Intrinsic Phase Radius r_0 (m)	M / M_T_COD	r_0 / R_COD	Ratio
Mercury	3.301×10^{23}	8.4918×10^{-4}	1.9386×10^{-30}	1.9386×10^{-30}	1.000000
Earth	5.972×10^{24}	1.5363×10^{-2}	3.5071×10^{-29}	3.5071×10^{-29}	1.000000
Jupiter	1.898×10^{27}	4.8826	1.1146×10^{-26}	1.1146×10^{-26}	1.000000
Sun	1.989×10^{30}	5.1167×10^3	1.1681×10^{-23}	1.1681×10^{-23}	1.000000

Representative Result

Representative Solar-System bodies are normalized by the same multiplicative-invariant geometry,

$$M / M_T_COD = r_0 / R_COD,$$

demonstrating a common geometric correspondence between local mass and the global structure of the universe.

The complete Solar-System analysis is provided in **Supplementary Information 1**.

3. Complex Quaternionic Spherical Oscillator

To realize multiplicative-invariant geometry, we propose the **Complex Quaternionic Spherical Oscillator (CQSO)** as the minimal ontological structure of physical existence.

Its fundamental state function is

$$\Psi(r) = A(r) e^{i\Phi(r)} q(r).$$

97 The three mutually orthogonal quaternionic axes satisfy

98 $|i+j+k|=\sqrt{3}.$

99 This structure simultaneously satisfies

- 100 • multiplicative invariance,
- 101 • quaternionic normalization, and
- 102 • time-independent phase equilibrium.

103 The mathematical derivation of the CQSO and its minimality is presented in the
104 Supplementary Information.

105

106 4. Time-Independent Phase Equilibrium

107 Within COD, physical existence is not generated through temporal evolution.

108 Instead, it is determined by stationary phase equilibrium.

109 The fundamental variational condition is

110 $\Delta[\sum K_{ij}(\Phi_i-\Phi_j)^2]=0,$

111 with the corresponding equilibrium condition

112 $\sum K_{ij}\sin(\Phi_j-\Phi_i)=0.$

113 The recursive self-consistent organization is summarized by

114 $\Delta(\Delta\Phi)\rightarrow 0,$

115 while maintaining the multiplicative-invariant condition

116 $\|k\|\|r\|=\|C\|.$

117 The complete variational derivation is given in Supplementary Information.

118

119 5. Universal Mass Generation

120 Combining multiplicative-invariant geometry with time-independent phase equilibrium yields
121 the universal mass-generation equation

122

M_mode

123

=

124

M_T_COD

125

(S_radial/4)

126

exp(-S_radial*QC_mode).

127

This equation applies universally to all mass modes.

128

The electron, proton, and neutron are therefore interpreted not as objects requiring

129

independent mass equations, but as distinct geometrically selected condensation modes

130

generated from the same universal structure.

131

The complete derivation and numerical calculations are presented in Supplementary

132

Information 2.

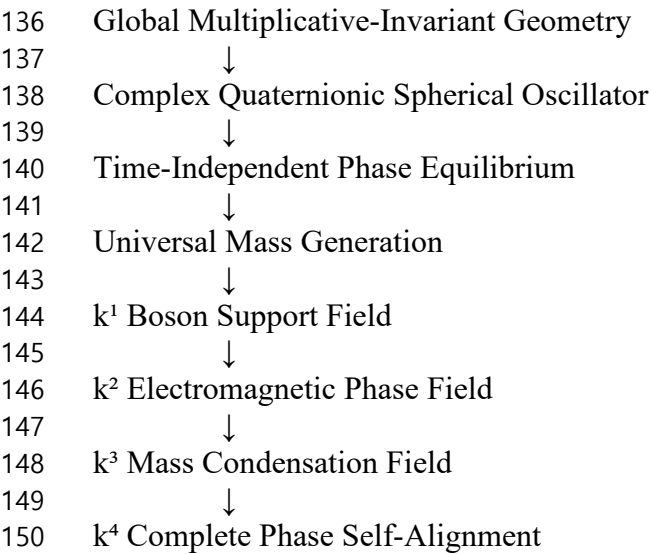
133

134

6. COD Standard Model

135

The preceding results are summarized by the recursive phase hierarchy



151

This hierarchy unifies physical existence, mass generation, and extreme condensed states

152

within a single multiplicative-invariant geometric framework.

153

154

Table 2. Representative Mass Generation in the COD Standard Model

155

156 Within the COD Standard Model, every particle mass is generated from the same universal
157 mass-generation equation,

158 M_{mode}
159 $=$
160 $M_{\text{T_COD}}$
161 $(S_{\text{radial}}/4)$
162 $\exp(-S_{\text{radial}} \gamma_Q C_{\text{mode}}).$

163 The electron, proton, and neutron therefore correspond to distinct recursive geometric
164 condensation modes rather than independent mass equations.

Particle	Geometric Selection Structure	COD Mass (kg)	Reference Mass (kg)	Relative Difference
Electron	$G_e = 1$	$9.1110758194 \times 10^{-31}$	$9.1093837139 \times 10^{-31}$	+0.018575%
Proton	$G_p = 3 + 3\Lambda^2 + B\Lambda^3$	$1.6724708365 \times 10^{-27}$	$1.67262192595 \times 10^{-27}$	-0.009033%
Neutron	$G_n = 3 + 3\Lambda^2 + (B + \epsilon)\Lambda^3$	$1.6747675869 \times 10^{-27}$	$1.67492750056 \times 10^{-27}$	-0.009548%

165 **Joint Self-Consistency**

166 $RMSE = 0.0131377\%$

167 **Representative Result**

168 The electron, proton, and neutron are not described by separate empirical mass equations.
169 Instead, they emerge as distinct recursive geometric condensation modes generated by the
170 same universal exponential mass-generation equation.

171 The complete derivation and numerical calculations are presented in **Supplementary**
172 **Information 2**.

173

174 **7. Discussion**

175 The present work is not intended to replace the phenomenological framework of modern
176 physics.

177 Instead, it proposes a more fundamental geometric principle governing the generation and
178 maintenance of physical existence.

179 Within this perspective,

- multiplicative invariance provides the universal correspondence between local and global geometry,
- the Complex Quaternionic Spherical Oscillator represents the minimal self-organizing ontological structure,
- and mass is interpreted as a geometric eigenvalue selected by time-independent phase equilibrium.

This framework may provide a common geometric foundation for particle physics, gravitation, phase engineering, and complex phase systems.

8. Conclusion

This work proposes a multiplicative-invariant geometry connecting local mass with the global structure of the universe.

To interpret this geometry, we introduced the Complex Quaternionic Spherical Oscillator together with the principle of time-independent phase equilibrium, from which a universal mass-generation equation was derived.

Within this framework, the electron, proton, and neutron are interpreted as distinct geometrically selected condensation modes generated by the same universal equation, while mass itself is understood as a geometric eigenvalue selected through stationary phase equilibrium.

The detailed mathematical derivations, numerical validations, and recursive particle-generation structures are presented in Supplementary Information 1 and Supplementary Information 2.

References

1. Hamilton, W. R.

Elements of Quaternions.

Chelsea Publishing, New York (1866).

Relevant to: Section 3 (Complex Quaternionic Spherical Oscillator)

2. Hamilton, W. R.

Lectures on Quaternions.

Hodges and Smith, Dublin (1853).

Relevant to: Section 3 (Quaternionic Geometry)

3. Noether, E.

Invariante Variationsprobleme.

Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen,
235–257 (1918).

Relevant to: Section 4 (Time-Independent Phase Equilibrium)

4. Dirac, P. A. M.

The Principles of Quantum Mechanics.

Oxford University Press (4th ed., 1958).

Relevant to: Sections 3–5 (Quantum States and Eigenvalue Structures)

5. Penrose, R.

The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe.

Jonathan Cape (2004).

Relevant to: Sections 2–6 (Geometry, Spacetime, and Mathematical Structures)

6. Ryoo, J. K.

COD Standard Model Based on the Complex Quaternionic Spherical Oscillator.

InnoLab Science Institute (2026).

Relevant to: Supplementary Information 1–2.

Supplementary Information 1

Multiplicative-Invariant Geometry-Based Mass and Intrinsic Radius

S1. Multiplicative-Invariant Geometry

Within the COD framework, every intrinsic mass satisfies the universal multiplicative-invariant relation

$$M / M_T = r_0 / R$$

or equivalently,

$$M \cdot R = M_T \cdot r_0.$$

Hence,

$$r_0 = (R / M_T) M.$$

where

- **M** : intrinsic mass
- **M_T** : COD global reference mass
- **R** : COD global reference radius
- **r₀** : intrinsic phase radius

The intrinsic phase radius is the unique geometric reference radius determined solely by the mass through multiplicative invariance.

It represents the self-consistent geometric relationship between a local mass and the global phase space of the universe. Every stable mass therefore possesses a unique intrinsic phase radius satisfying the multiplicative-invariant condition.

Within COD, the **Pure Mass Reference Radius** is defined as

$$r_s = 2GM / c^2.$$

The intrinsic phase radius is related to the Pure Mass Reference Radius by

268 $r_0 = \sqrt{3} r_s.$

269 Thus, the intrinsic phase radius incorporates the geometric contribution of the surrounding
270 Complex Quaternionic Phase Field beyond the pure mass reference state.

271

272 **S2. Physical Interpretation of the COD Global** 273 **Reference Pair**

274 The global phase-equilibrium closure relation of COD is

275 $c^2 = 2\sqrt{3} \cdot G M_T / R,$

276 which may be rewritten as

277 $M_T / R = c^2 / (2\sqrt{3} G).$

278 Within the COD framework, the speed of light **c**, representing the universal propagation
279 structure, and the gravitational constant **G**, representing the universal gravitational structure,
280 jointly determine the global multiplicative-invariant geometry of the universe.

281 After imposing the joint self-consistency condition of the electron, proton, and neutron
282 eigenmodes, the COD global reference pair becomes

283 $M_{T,COD} = 1.7028151007 \times 10^{53} \text{ kg}$

284

285 $R_{COD} = 4.3804873821 \times 10^{26} \text{ m}.$

286 Accordingly,

287 the speed of light **c** determines the global reference radius,

288 while the gravitational constant **G** determines the corresponding global reference mass.

289 Together, they define the global multiplicative-invariant geometry satisfying the time-
290 independent phase-equilibrium closure.

291

292 **S3. Solar-System Verification of Multiplicative** 293 **Invariance**

294 Using the COD global reference pair obtained above,

$$M_T = 1.7028151007 \times 10^{53} \text{ kg}$$

$$R = 4.3804873821 \times 10^{26} \text{ m,}$$

the multiplicative-invariant relation

$$M / M_T = r_0 / R$$

is evaluated for representative Solar-System bodies.

Table S1. Multiplicative-Invariant Normalization of the Solar System

Body	Mass M (kg)	Schwarzschild radius r_s (m)	$r_0 = \sqrt{3} \cdot r_s$ (m)	M/M _T	r/R	Ratio	Error
Mercury	3.301×10^{23}	4.9028×10^{-4}	8.4918×10^{-4}	1.9386×10^{-30}	1.9386×10^{-30}	1.0	-0.000000%
Venus	4.867×10^{24}	7.2286×10^{-3}	1.2520×10^{-2}	2.8582×10^{-29}	2.8582×10^{-29}	1.0	-0.000000%
Earth	5.972×10^{24}	8.8698×10^{-3}	1.5363×10^{-2}	3.5071×10^{-29}	3.5071×10^{-29}	1.0	-0.000000%
Mars	6.417×10^{23}	9.5307×10^{-4}	1.6508×10^{-3}	3.7685×10^{-30}	3.7685×10^{-30}	1.0	-0.000000%
Jupiter	1.898×10^{27}	2.8190	4.8826	1.1146×10^{-26}	1.1146×10^{-26}	1.0	-0.000000%
Saturn	5.683×10^{26}	0.84406	1.4620	3.3374×10^{-27}	3.3374×10^{-27}	1.0	-0.000000%
Uranus	8.681×10^{25}	0.12893	0.22332	5.0980×10^{-28}	5.0980×10^{-28}	1.0	-0.000000%
Neptune	1.024×10^{26}	0.15209	0.26342	6.0136×10^{-28}	6.0136×10^{-28}	1.0	-0.000000%
Sun	1.989×10^{30}	2954.1	5116.7	1.1681×10^{-23}	1.1681×10^{-23}	1.0	-0.000000%

As shown in Table S1,

all representative Solar-System bodies satisfy

$$M / M_T = r_0 / R$$

to numerical precision.

This result indicates that all gravitationally bound systems share the same multiplicative-invariant geometry, independent of their absolute mass scale.

The intrinsic phase radius therefore serves as a universal geometric measure connecting local mass with the global phase space of the universe.

S4. Geometry of the Complex Quaternionic Phase Shell

The three mutually orthogonal quaternion basis vectors satisfy

$$|\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}| = \sqrt{3}.$$

Within the COD framework, this quantity is interpreted as the intrinsic geometric eigenvalue of the **Complex Quaternionic Phase Shell** surrounding the pure mass state.

Accordingly,

$$\lambda_Q = \sqrt{3}$$

is defined as the **Quaternionic Phase-Shell Eigenvalue**.

$\sqrt{3}$ is not a coefficient introducing a new physical length.

Instead, it is the universal geometric eigenvalue of the Complex Quaternionic Phase Shell surrounding the pure mass state.

The Complex Quaternionic Phase Shell represents the intrinsic geometric degree of freedom of space generated by the surrounding complex quaternionic phase field.

Accordingly, space is not regarded as an independent physical entity but as the geometric manifestation of the surrounding phase field.

The intrinsic phase radius and the Pure Mass Reference Radius satisfy

$$r_0 = \sqrt{3} r_s.$$

Conversely,

$$r_s = (1/\sqrt{3}) r_0.$$

The complementary normalization eigenvalue is therefore

$$\lambda_{Q^{-1}} = 1/\sqrt{3},$$

which satisfies the multiplicative-invariant relation

$$\lambda_Q \lambda_{Q^{-1}} = 1.$$

Thus, $\sqrt{3}$ and $1/\sqrt{3}$ constitute a complementary geometric eigenvalue pair of the Complex Quaternionic Phase Shell.

339 **S5. Extreme Phase Normalization: Black Hole**

340 The preceding mass–phase geometry naturally explains the limiting condensed state
341 represented by a black hole.

342 Within COD, a black hole is not interpreted as a fundamentally different geometric object.

343 Instead, it represents the limiting phase-equilibrium state in which the Complex Quaternionic
344 Phase Shell becomes completely self-aligned with the Pure Mass Reference State.

345 As gravitational condensation increases,

346 the surrounding complex quaternionic phase field progressively approaches complete self-
347 alignment,

348 and the phase difference converges toward

349 $\Delta\Phi \rightarrow 0$.

350 Consequently,

351 the independent geometric degree of freedom of the Complex Quaternionic Phase Shell
352 becomes completely normalized,

353 leading to

354 r_o
355 $\times (1/\sqrt{3})$
356 $\downarrow$
357 r_s .

358 Equivalently,

359 $\sqrt{3} \times (1/\sqrt{3}) = 1$.

360 This process does not represent the disappearance of the Phase Shell.

361 Rather, it represents the complete normalization of its independent geometric degree of
362 freedom into the Pure Mass Reference State.

363 Within COD, this limiting self-consistent state is defined as

364 6π Complete Phase Closure.

365 In this state,
 366 the surrounding phase field becomes completely self-aligned with the pure mass state,
 367 forming a three-turn complete phase closure with no remaining independent phase degrees of
 368 freedom.
 369 Accordingly,
 370 the Pure Mass Reference Radius
 371 $r_s = 2GM / c^2$
 372 is interpreted as the universal pure mass reference associated with every mass,
 373 whereas the ordinary intrinsic phase radius
 374 $r_o = \sqrt{3} r_s$
 375 includes the additional geometric degree of freedom of space contributed by the surrounding
 376 Complex Quaternionic Phase Shell.
 377 Therefore, within the COD framework, a black hole is understood as the ultimate time-
 378 independent phase-equilibrium state in which the Complex Quaternionic Phase Shell has
 379 been completely normalized, leaving only the Pure Mass Reference Geometry.

380

381 **S7. Ontological Interpretation of Relativity**

382 The same multiplicative-invariant geometry further suggests an ontological interpretation of
 383 relativity.

384 The conserved quantity is the intrinsic mass,
 385 whereas the surrounding phase shell is geometrically adaptive.

386 Accordingly,

387 Invariant Mass
 388 ↓
 389 Adaptive Phase Radius
 390 ↓
 391 Observable Space-Time Geometry

392 Within this interpretation,

393 relativity is understood not as the relativity of the intrinsic mass,
 394 but as the relativity of the geometric representation of the phase field surrounding an
 395 individual mass body.

396 Different gravitational and dynamical conditions therefore produce different geometric
 397 coordinate systems through corresponding changes in the surrounding phase field, while the
 398 intrinsic mass remains unchanged.

399 This interpretation suggests that the mathematical structure of relativity represents the
 400 geometry of adaptive phase fields associated with invariant masses.

401 A complete mathematical formulation and detailed comparison with General Relativity are
 402 beyond the scope of the present work and will be presented separately.

403

404

405 **Supplementary Information 2**

406 **Geometric Mass Generation Structure of the COD** 407 **Standard Model**

408 This Supplementary Note presents, in a stepwise form, how the electron, proton, and neutron
 409 mass eigenvalues are generated from a common framework of time-independent phase
 410 equilibrium and multiplicative-invariant geometry in the COD Standard Model.

411 Within COD, mass is not treated as an independently assigned fundamental quantity. Instead,
 412 it is interpreted as a geometrically selected condensation eigenmode arising from the joint
 413 structure of complex dual energy, the self-organization of the Complex Quaternionic
 414 Spherical Oscillator, quaternionic spherical eigeometry, multiplicative invariance, and the
 415 time-independent phase-equilibrium variational condition.

416 The overall induction structure is

417 Complex Dual Energy

$$418 \quad S = P + iQ$$

$$419 \quad P = \|Q\|$$

420 $\downarrow$

421 Complex Quaternionic Spherical Oscillator

422 $\downarrow$

423 Quaternionic Spherical Eigeometry

$$424 \quad |i + j + k| = \sqrt{3}$$

425 ↓
 426 Multiplicative-Invariant Geometry
 427 $M_{\text{mode}} / M_T = r_{0\text{mode}} / R$
 428 ↓
 429 Time-Independent Phase-Equilibrium Variational Principle
 430 $\Delta[\sum K_{ij}(\Phi_i - \Phi_j)^2] = 0$
 431 $\sum_j K_{ij} \sin(\Phi_j - \Phi_i) = 0$
 432 ↓
 433 Global Closure
 434 $c^2 = 2\sqrt{3} G M_T / R$
 435 ↓
 436 COD Global Reference Pair
 437 M_T, R
 438 ↓
 439 Universal Mass Generation
 440 ↓
 441 Electron / Proton / Neutron

442 This hierarchy condenses the geometric-generation structure already presented in the
 443 Supplementary Note into a single mass-generation sequence.
 444
 445

446 **Supplementary 2.1**

447 **Geometric Mass Generation in the COD Standard Model**

448 **2.1.1 Complex Dual Energy and the Complex Quaternionic Spherical** 449 **Oscillator**

450 The starting point of COD is the complex dual-energy structure

451 $S = P + iQ.$

452 Under phase equilibrium,

453 $P = \|Q\|.$

454 Here, (P) represents the global real-energy structure, whereas (Q) represents the local
 455 quaternionic phase degrees of freedom.

456 A stable physical entity is defined as a **Complex Quaternionic Spherical Oscillator** in
 457 which these complex dual-energy components are self-consistently closed. This ontological
 458 starting point is also presented as the first stage of the mass-generation hierarchy in the
 459 current Supplementary Note.

460 The three mutually orthogonal quaternionic axes satisfy

461 $|i + j + k| = \sqrt{3}.$

462 Accordingly,

463 $\lambda_Q = \sqrt{3}$

464 is taken as the fundamental eigenvalue of the complex quaternionic spherical geometry, while

465 $\gamma_Q = \sqrt{3} / 2$

466 is used as the quaternionic phase-equilibrium coefficient in the mass-generation equation.

467

468

469 **2.1.2 Multiplicative-Invariant Mass–Phase-Radius Correspondence**

470 Every mass mode is related to the global reference mass and radius through

471 M_{mode} / M_T

472 $=$

473 $r_{0_{\text{mode}}} / R,$

474 or equivalently,

475 $M_{\text{mode}} \cdot R$

476 $=$

477 $M_T \cdot r_{0_{\text{mode}}}.$

478 Hence,

479 $r_{0_{\text{mode}}}$

480 $=$

481 $(R / M_T) M_{\text{mode}}.$

482 Here, ($r_{0_{\text{mode}}}$) denotes the intrinsic phase radius of the corresponding mass mode.

483 This relation connects local mass and global phase space through the same geometric ratio
484 and therefore provides the global–local correspondence underlying the COD mass-generation
485 structure. The same multiplicative-invariant relation is used as the central geometric relation
486 in the current Supplementary Note.

487

488 **2.1.3 Time-Independent Phase-Equilibrium Variational Condition**

489 Within COD, a mass mode is not selected by a time-evolution equation. It is selected by the
490 time-independent phase-equilibrium condition.

491 The basic variational condition is

492 $\Delta[\sum K_{ij}(\Phi_i - \Phi_j)^2] = 0,$

493 with the corresponding phase-equilibrium condition

494 $\sum_j K_{ij} \sin(\Phi_j - \Phi_i) = 0.$

495 These relations describe a geometric equilibrium in which phase imbalance among the
496 constituent phase components is removed and the entire complex quaternionic structure
497 reaches a self-consistent state.

498 Mass generation is therefore interpreted not as a temporal accumulation of particles, but as
499 the selection of stable condensation eigenmodes permitted by the phase geometry.

500

501 **2.1.4 Global Phase-Equilibrium Closure and the COD Global Reference Pair**

502 The complex quaternionic eigengeometry and multiplicative-invariant phase equilibrium lead
503 to the global closure relation

504 c^2
505 $=$
506 $2\sqrt{3} G M_T / R.$

507 Thus,

508 M_T / R
509 $=$
510 $c^2 / (2\sqrt{3} G).$

511 Within COD, the precisely measured natural constants (c) and (G) are used as the reference
512 quantities fixing the global mass–space ratio of the universe.

513 After imposing the joint self-consistency condition of the electron, proton, and neutron mass
514 eigenmodes, the current COD global reference pair is

515 M_{T_COD}
516 $=$
517 $1.7028151007 \times 10^{53} \text{ kg}$
518
519 R_{COD}
520 $=$

521 $4.3804873821 \times 10^{26}$ m.

522 These are the values used in the main calculation section of the current Supplementary Note.

523 Within this interpretation, (c) primarily fixes the global spatial scale, whereas (G) determines
524 the corresponding global mass scale required for the time-independent phase-equilibrium
525 closure.

526

527 **Supplementary 2.2**

528 **Geometric Induction of the Universal Mass-Generation** 529 **Equation**

530 The central step in the COD mass-generation structure is to express the multiplicative-
531 invariant mass ratio in terms of spherical geometry and a mode-dependent exponential
532 condensation action.

533 The universal mass-generation equation is

$$\begin{aligned} 534 & M_{\text{mode}} / M_{\text{T_COD}} \\ 535 & = \\ 536 & r_{\text{o_mode}} / R_{\text{COD}} \\ 537 & = \\ 538 & (S_{\text{radial}} / 4) \\ 539 & \exp(-S_{\text{radial}} \gamma_Q C_{\text{mode}}). \end{aligned}$$

540 Therefore,

$$\begin{aligned} 541 & M_{\text{mode}} \\ 542 & = \\ 543 & M_{\text{T_COD}} \\ 544 & (S_{\text{radial}} / 4) \\ 545 & \exp(-S_{\text{radial}} \gamma_Q C_{\text{mode}}). \end{aligned}$$

546 Each factor has a distinct geometric role:

547 S_{radial}
548 =
549 Universal Radial Geometry
550
551 γ_Q
552 =
553 Quaternionic Equilibrium Coefficient

554
 555 C_{mode}
 556 $=$
 557 Local Condensation Eigenstructure
 558
 559 S_{mode}
 560 $=$
 561 Mode Condensation Action

562 These names are already collected in the current Supplementary Note.

563 The mode-condensation action may therefore be written as

564 S_{mode}
 565 $=$
 566 $S_{\text{radial}} \gamma_Q C_{\text{mode}},$

567 so that the universal mass-generation equation becomes

568 M_{mode}
 569 $=$
 570 M_{T_COD}
 571 $(S_{\text{radial}} / 4)$
 572 $\exp(-S_{\text{mode}}).$

573 The essential point is that all mass modes are generated from the same global equation. The
 574 distinction among different particles enters only through the geometric selection structure
 575 (C_{mode}) .

576

577 **2.2.1 Electron Reference Mode**

578 The electron is defined as the minimum self-consistent reference mode in the mass-
 579 generation hierarchy.

580 $G_e = 1$

581 and

582 $C_e = \beta_e = 47/48.$

583 Hence,

584 M_{e_COD}
 585 $=$

586 M_{T_COD}
 587 $(S_{radial} / 4)$
 588 $\exp[-S_{radial} \gamma_Q (47/48)].$

589 The current calculation gives

590 M_{e_COD}
 591 $=$
 592 $9.1110758194 \times 10^{-31} \text{ kg},$

593 with the relative difference

594 δ_e
 595 $=$
 596 $+0.0185754\%.$

597 The intrinsic phase radius of the electron follows from multiplicative invariance:

598 r_{o_e}
 599 $=$
 600 R_{COD}
 601 $(M_{e_COD} / M_{T_COD}),$

602 giving

603 r_{o_e}
 604 $=$
 605 $2.3438218658 \times 10^{-57} \text{ m}.$

606

607

608 **Supplementary 2.3**

609 **Recursive Geometric Selection Structure**

610 Beyond the electron reference mode, the proton and neutron are defined as additional
 611 recursive quaternionic condensation modes built upon the same universal mass-generation
 612 structure.

613 The mode-dependent condensation eigenstructure is expressed as

614 C_{mode}
 615 $=$
 616 β_e
 617 $-$
 618 $\ln(G_{mode})/(S_{radial} \gamma_Q).$

619 Substitution into the universal mass-generation equation gives

$$\begin{aligned} 620 \quad & M_{\text{mode}} \\ 621 \quad & = \\ 622 \quad & M_e G_{\text{mode}}. \end{aligned}$$

623 Thus, (G_{mode}) acts as the recursive geometric selection structure of the
624 corresponding mass mode rather than as an independently introduced empirical mass ratio.

625 **Proton**

626 For the proton,

$$\begin{aligned} 627 \quad & G_p \\ 628 \quad & = \\ 629 \quad & 3 + 3\Lambda^2 + B\Lambda^3. \end{aligned}$$

630 Using

$$\begin{aligned} 631 \quad & \Lambda = 11 \\ 632 \quad & \\ 633 \quad & B = 53/48, \end{aligned}$$

634 one obtains

$$\begin{aligned} 635 \quad & G_p \\ 636 \quad & = \\ 637 \quad & 1835.6458333333. \end{aligned}$$

638 Therefore,

$$\begin{aligned} 639 \quad & C_p \\ 640 \quad & = \\ 641 \quad & 47/48 \\ 642 \quad & - \\ 643 \quad & \ln(G_p)/(S_{\text{radial}} \gamma_Q), \end{aligned}$$

644 and

$$\begin{aligned} 645 \quad & M_{p_COD} \\ 646 \quad & = \\ 647 \quad & M_{e_COD} G_p, \end{aligned}$$

648 or equivalently,

$$\begin{aligned} 649 \quad & M_{p_COD} \\ 650 \quad & = \end{aligned}$$

651 M_{T_COD}
 652 $(S_{radial}/4)$
 653 $\exp(-S_{radial} \gamma_Q C_p).$

654 The calculated value is

655 M_{p_COD}
 656 $=$
 657 $1.6724708365 \times 10^{-27} \text{ kg},$

658 with

659 δ_p
 660 $=$
 661 $-0.00903309\%.$

662 The intrinsic phase radius is

663 r_{o_p}
 664 $=$
 665 $4.3024268421 \times 10^{-54} \text{ m}.$

666 **Neutron**

667 For the neutron,

668 G_n
 669 $=$
 670 $3 + 3\Lambda^2 + (B + \varepsilon)\Lambda^3,$

671 with

672 $\varepsilon = 1/528.$

673 This gives

674 G_n
 675 $=$
 676 $1838.1666666667.$

677 Therefore,

678 C_n
 679 $=$
 680 $47/48$
 681 $-$
 682 $\ln(G_n)/(S_{radial} \gamma_Q),$

683 and

684 M_n_COD
685 =
686 $M_e_COD G_n$.

687 The calculated value is

688 M_n_COD
689 =
690 $1.6747675869 \times 10^{-27} \text{ kg}$,

691 with

692 δ_n
693 =
694 -0.00954750% .

695 The intrinsic phase radius is

696 $r\theta_n$
697 =
698 $4.3083352264 \times 10^{-54} \text{ m}$.

701 **Supplementary 2.4**

702 **Mass-Generation Results of the COD Standard Model**

703 At this point, Table S2 serves only as a compact summary of the results and does not repeat
704 the preceding derivation.

705 **Table S2. COD Standard Model Based Mass–Energy Generation Structure**

Category	COD Expression	COD Mass Value	Experimental / Standard Reference Value	Difference	Interpretation
Global Reference Pair	$M_T_COD / R_COD = c^2/(2\sqrt{3}G)$	$M_T_COD = 1.7028151007 \times 10^{53} \text{ kg}$	—	—	Jointly self-consistent multiplicative-invariant global reference pair

Category	COD Expression	COD Mass Value	Experimental / Standard Reference Value	Difference	Interpretation
Universal Mass Generation	$M_{\text{mode}}/M_{\text{T_COD}} = r_{\text{mode}}/R_{\text{COD}} = (S_{\text{radial}}/4)\exp(-S_{\text{radial}}\gamma_Q C_{\text{mode}})$	—	—	—	Universal generation equation common to all mass modes Minimum self-consistent
Electron	$G_e = 1, C_e = 47/48$	9.111075819 4×10^{-31} kg	9.1093837139 $\times 10^{-31}$ kg	+0.018575	% mass-condensation mode
Proton	$G_p = 3 + 3\Lambda^2 + B\Lambda^3 = 1835.6458333333$	1.672470836 5×10^{-27} kg	1.6726219259 5×10^{-27} kg	-0.009033	Recursive geometric % condensation stable mode
Neutron	$G_n = 3 + 3\Lambda^2 + (B+\epsilon)\Lambda^3 = 1838.1666666667$	1.674767586 9×10^{-27} kg	1.6749275005 6×10^{-27} kg	-0.009548	Recursive neutral % completion mode

706

707 These numerical values correspond to the final calculation section of the current file.

708 The joint self-consistency residual of the three particle modes is

709 RMSE

710 =

711 $\sqrt{[(\delta_e^2 + \delta_p^2 + \delta_n^2)/3]},$

712 giving

713 RMSE

714 =

715 0.0131377%.

716 Thus, with the current COD global reference pair, all three relative residuals satisfy

717 $|\delta_{\text{mode}}| < 0.02\%.$

718

719

Supplementary 2.5

Recursive Phase Hierarchy of the COD Standard Model

The universal generation structure is not restricted to particle masses.

Within COD, the physical structures of nature are extended into the following recursive phase hierarchy:

Universal Mass–Energy Generation



k^1

Boson Support Field

$X_T^{(1)}$

Planck-scale Complex Quaternionic
Spherical Oscillator

One-turn Eigenmode



k^2

Electromagnetic Phase Field

$X_T^{(2)}$

Complex Electromagnetic Structure
derived from

$S = P + iQ$

$P = \|Q\|$



k^3

Mass Condensation Field

Electron

Proton

Neutron



k^4

Black-Hole Phase Field

Complete Phase Self-Alignment

762 $\Delta\Phi \rightarrow 0$

763 The current Supplementary Note similarly organizes the hierarchy as the (k^1) boson support
764 field, (k^2) electromagnetic phase field, (k^3) electron–proton–neutron mass-condensation
765 field, and (k^4) black-hole complete phase self-alignment.

766 At the present stage, however, the absolute energy eigenvalues of the (k^1) and (k^2)
767 structures remain at the **proposal stage**, whereas explicit numerical mass-generation
768 verification is performed for the (k^3) electron, proton, and neutron modes. This distinction is
769 also recorded in the existing Supplementary Note.

770

771 Core Conclusion of Supplementary Note 2

772 Within the COD Standard Model, the electron, proton, and neutron do not require
773 independent mass equations.

774 All three modes are generated by the same time-independent multiplicative-invariant mass-
775 generation equation,

776 M_{mode}
777 $=$
778 M_{T_COD}
779 $(S_{\text{radial}}/4)$
780 $\exp(-S_{\text{radial}} \gamma_Q C_{\text{mode}}).$

781 The differences among the particle modes arise only through the recursive quaternionic
782 geometric selection structure

783 G_{mode}

784 and the corresponding

785 $C_{\text{mode}}.$

786 The COD mass-generation structure may therefore be summarized as

787 Global Multiplicative-Invariant Geometry
788 +
789 Complex Quaternionic Spherical Eigengeometry
790 +
791 Time-Independent Phase Equilibrium
792 ↓
793 Universal Exponential Mass-Generation Equation
794 ↓

795 Mode-Dependent Recursive Geometric Selection

796

↓

797 Electron / Proton / Neutron

798 One editorial point should be preserved during final cleanup: older reference-pair values

799 remain in a few parts of the uploaded draft. For example, one section still contains

800 ($M_{\mathrm{T,COD}} = 1.7047437164 \times 10^{53} \mathrm{kg}$), whereas the current

801 main calculation uses ($1.7028151007 \times 10^{53} \mathrm{kg}$). Older residual statements

802 also remain in the Korean editing material.

803 For the final version, the document should therefore be standardized throughout to

804 $M_{\mathrm{T,COD}} = 1.7028151007 \times 10^{53} \mathrm{kg}$

805

806 $R_{\mathrm{COD}} = 4.3804873821 \times 10^{26} \mathrm{m}$

807

808 $\mathrm{RMSE} = 0.0131377\%$.

809

810

811

812

813

814

815

816

817

818

(한국어판)

Multiplicative-Invariant Geometry of the Universe

승산불변 기하에 기반한 우주의 질량 생성 구조

초록 (Abstract)

본 연구는 국소 질량과 전역 우주를 연결하는 새로운 승산불변 기하 구조를 제안한다.

우리는

$$M / M_T = r_0 / R$$

또는

$$M \cdot R = M_T \cdot r_0$$

의 보편적 기하 관계가 성립함을 보이고, 이를 승산불변 기하(Multiplicative-Invariant Geometry)로 정의한다.

이 관계를 해석하기 위하여 복소 쿼터니언 구형진동자(Complex Quaternionic Spherical Oscillator, CQSO)를 존재의 최소 기하 구조로 제안하고, 시간독립 위상평형과 승산불변 변분원리를 이용하여 보편 질량 생성식을 유도한다.

그 결과 전자, 양성자 및 중성자의 질량은 하나의 공통된 지수형 질량 생성식으로 기술되며, 질량은 시간독립 위상평형이 선택하는 기하학적 고유값으로 해석된다.

840 승산불변 기하의 수치 검증과 질량 생성의 상세 유도는 Supplementary
841 Information 에 제시하였다.

842

843 1. 서론

844 1.1 연구의 배경

845 현대 물리학은 힘, 장, 시공간 및 양자상태를 이용하여 자연현상을 성공적으로
846 기술해 왔다.

847 그러나 이러한 접근은 존재가 왜 안정적으로 형성되고 유지되는가에 대한 보다
848 근본적인 기하학적 원리를 직접 설명하지 않는다.

849 본 연구는 다음과 같은 질문에서 출발한다.

850 자연계의 모든 존재를 안정적으로 생성하고 유지하는 보편적인 기하학적
851 자기조직화 원리는 무엇인가?

852 COD 는 존재를 시간축 위에서 생성되는 대상으로 보지 않는다.

853 존재는 시간과 무관하게 형성되는 위상평형 기반의 자기조직화 기하 구조이며,
854 물리법칙은 이러한 기하 구조가 외부로 나타난 표현으로 해석한다.

855

856 1.2 본 연구의 핵심 발견

857 본 연구의 핵심 발견은 질량과 공간 사이에 다음의 승산불변 기하가 존재한다는
858 것이다.

859 $M / M_T = r_0 / R$

860 또는

861 $M \cdot R = M_T \cdot r_0$

862 이 관계는 국소 질량과 전역 우주를 하나의 동일한 기하비로 연결한다.

863 이를 바탕으로

864 $c^2 = 2\sqrt{3} G M_T / R$

865 의 전역 폐합식을 얻으며,

866 복소 쿼터니언 구형진동자와 시간독립 위상평형을 통해 보편 질량 생성구조를
867 구축한다.

868 승산불변의 수치 검증은 Supplementary Information 1 에 제시하였다.

869

870 2. 승산불변 기하

871 2.1 전역-국소 대응

872 COD 에서는 모든 질량이 다음의 승산불변 관계를 만족한다.

873 $M / M_T = r_0 / R$

874 또는

875 $M \cdot R = M_T \cdot r_0$

876 따라서

877 $r_0 = (R / M_T) M$

878 를 얻는다.

879 여기서

- 880 • M 은 국소 질량,

- 881 • M_T 는 우주의 전역 기준질량,
882 • R 은 우주의 전역 기준반경,
883 • r_0 는 질량의 고유 위상반경이다.

884 이 관계는 질량과 공간이 동일한 승산불변 기하에 의해 연결되어 있음을
885 의미한다.

886
887 **2.2 전역 폐합**

888 승산불변 기하는 다음의 전역 폐합관계를 만족한다.

889 $c^2 = 2\sqrt{3} G M_T / R$

890 따라서

891 $M_T / R = c^2 / (2\sqrt{3} G)$

892 이다.

893 COD 에서는

894 빛의 속도 c 가 전역 공간척도를,

895 중력상수 G 가 대응하는 전역 질량척도를 결정한다고 해석한다.

896

897

898 **Table 1. 태양계 승산불변 기하의 대표 검증 결과**

899 **Table 1. 태양계의 승산불변 기하 정규화 (Representative Multiplicative-Invariant**
900 **Geometry of the Solar System)**

901 COD 전역 기준쌍(M_{T_COD}, R_{COD})을 적용하면 대표적인 태양계 천체들은
902 모두 다음의 승산불변 관계를 만족한다.

903 $M / M_T_COD = r_0 / R_COD$

904

905

천체 질량 M (kg)	고유 위상반경 r_0 (m)	M/M_T_COD	r_0/R_COD	비율
수성 3.301×10^{23}	8.4918×10^{-4}	1.9386×10^{-30}	1.9386×10^{-30}	1.000000
지구 5.972×10^{24}	1.5363×10^{-2}	3.5071×10^{-29}	3.5071×10^{-29}	1.000000
목성 1.898×10^{27}	4.8826	1.1146×10^{-26}	1.1146×10^{-26}	1.000000
태양 1.989×10^{30}	5.1167×10^3	1.1681×10^{-23}	1.1681×10^{-23}	1.000000

906

907 **요약**

908 대표적인 태양계 천체들은 모두 동일한 승산불변 기하

909 $M / M_T_COD = r_0 / R_COD$

910 를 수치적으로 만족한다.

911 전체 태양계 계산 결과는 **Supplementary Information 1** 에 제시하였다.

912

913 3. 복소 쿼터니언 구형진동자

914 승산불변 기하를 구현하는 최소 존재론적 구조로 복소 쿼터니언 구형진동자를
915 제안한다.

916 기본 상태함수는

917 $\Psi(r)=A(r)e^{\{i\Phi(r)\}}q(r)$

918 이다.

919 세 개의 직교 쿼터니언 축은

920 $|i+j+k|=\sqrt{3}$

921 의 고유기하를 형성한다.

922 이 구조는

- 923 • 승산불변,
- 924 • 쿼터니언 정규화,
- 925 • 시간독립 위상평형

926 을 동시에 만족하는 최소 기하 구조이다.

927 복소 쿼터니언 구조의 최소성과 수리적 유도는 Supplementary Information 에
928 제시하였다.

929

930 4. 시간독립 위상평형

931 COD 에서 존재는 시간진화에 의해 생성되지 않는다.

932 존재는 시간독립 위상평형 조건을 만족하는 자기정합 구조이다.

933 기본 변분조건은

934 $\Delta[\Sigma K_{ij}(\Phi_i - \Phi_j)^2] = 0$

935 이며,

936 위상평형 조건은

937 $\Sigma K_{ij} \sin(\Phi_j - \Phi_i) = 0$

938 이다.

939 이 과정은

940 $\Delta(\Delta\Phi) \rightarrow 0$

941 으로 표현되는 자기정합 구조를 형성한다.

942 또한

943 $\|k\|r\| = \|C\|$

944 의 승산불변 관계를 유지한다.

945 변분식의 상세 유도는 Supplementary Information 에 제시하였다.

946

947 5. 보편 질량 생성

948 시간독립 위상평형과 승산불변 기하를 결합하면 다음의 보편 질량 생성식을
949 얻는다.

950 M_{mode}
951 $=$
952 $M_{\text{T_COD}}$
953 $(S_{\text{radial}}/4)$
954 $\exp(-S_{\text{radial}}\gamma_{\text{QC_mode}})$

955 이 식은 모든 질량모드에 공통적으로 적용되는 생성식이다.

956 전자, 양성자 및 중성자는 서로 다른 질량식을 갖는 것이 아니라,

957 동일한 생성식에서 서로 다른 기하학적 응축모드로 선택된다.

958 질량 생성의 상세한 유도와 계산은 Supplementary Information 2 에 제시하였다.

959

960 6. COD 표준모델

961 위의 결과를 종합하면 COD 표준모델은 다음과 같은 재귀적 위상계층으로
962 표현된다.

963 Global Multiplicative-Invariant Geometry
964 ↓
965 Complex Quaternionic Spherical Oscillator
966 ↓

967 Time-Independent Phase Equilibrium
 968 ↓
 969 Universal Mass Generation
 970 ↓
 971 k^1 Boson Support Field
 972 ↓
 973 k^2 Electromagnetic Phase Field
 974 ↓
 975 k^3 Mass Condensation Field
 976 ↓
 977 k^4 Complete Phase Self-Alignment

978 이 계층은 존재의 형성부터 질량 생성 및 극한 응축상태까지를 하나의 승산불변
 979 기하로 연결한다.

980

981 **Table 2. COD 표준모델의 질량 생성 결과**

982 **Table 2. COD 표준모델의 보편 질량 생성 결과 (Representative Mass Generation in**
 983 **the COD Standard Model)**

984 모든 질량모드는 하나의 공통 질량 생성식

985 M_{mode}
 986 $=$
 987 M_{T_COD}
 988 $(S_{radial}/4)$
 989 $\exp(-S_{radial} \gamma_Q C_{mode})$

990 으로부터 생성된다.

991

입자	기하 선택 구조	COD 질량 (kg)	기준 질량 (kg)	상대 오차
전자	$G_e = 1$	$9.1110758194 \times 10^{-31}$	$9.1093837139 \times 10^{-31}$	+0.018575%
양성자	$G_p = 3 + 3\Lambda^2 + B\Lambda^3$	$1.6724708365 \times 10^{-27}$	$1.67262192595 \times 10^{-27}$	-0.009033%
중성자	$G_n = 3 + 3\Lambda^2 + (B + \epsilon)\Lambda^3$	$1.6747675869 \times 10^{-27}$	$1.67492750056 \times 10^{-27}$	-0.009548%

992

993 **공동 자기정합 오차**

994 $RMSE = 0.0131377\%$

995 **요약**

996 전자, 양성자 및 중성자는 서로 다른 질량 방정식을 갖는 것이 아니라, 하나의
997 보편 질량 생성식으로부터 선택되는 서로 다른 재귀적 기하 응축모드이다.

998 질량 생성식의 상세한 유도 및 계산 과정은 **Supplementary Information 2** 에
999 제시하였다.

1000

1001 7. 논의

1002 본 연구는 자연현상을 설명하는 기존의 현상론적 접근을 대체하려는 것이
1003 아니다.

1004 오히려 존재를 생성하고 유지하는 보다 근본적인 기하학적 자기조직화 원리를
1005 제안한다.

1006 이 관점에서

- 1007 • 승산불변은 전역과 국소를 연결하는 보편 기하이며,
- 1008 • 복소 쿼터니언 구형진동자는 존재의 최소 자기조직화 구조이고,
- 1009 • 질량은 시간독립 위상평형이 선택하는 기하학적 고유값으로 해석된다.

1010 이러한 구조는 입자물리, 중력, 위상공학 및 복소 위상 시스템 공학을 하나의
1011 생성 원리 아래에서 해석할 수 있는 가능성을 제시한다.

1012

1013 8. 결론

1014 본 연구는 국소 질량과 전역 우주를 연결하는 승산불변 기하를 제안하였다.

1015 이를 해석하기 위하여 복소 쿼터니언 구형진동자와 시간독립 위상평형을
1016 도입하였으며, 이들로부터 보편 질량 생성식을 구축하였다.

1017 그 결과 전자, 양성자 및 중성자는 동일한 생성식에서 선택되는 서로 다른
1018 기하학적 응축모드로 해석되며, 질량은 시간독립 위상평형이 선택하는 기하학적
1019 고유값으로 이해된다.

1020 승산불변 기하의 정량적 검증과 보편 질량 생성식의 상세한 유도는 Supplementary
1021 Information 1 및 2 에 제시하였다.

1022

1023

1024 **References**

1025 **1. Hamilton, W. R.**
1026 *Elements of Quaternions.*
1027 Chelsea Publishing, New York (1866).

1028 **Relevant to:** Section 3 (Complex Quaternionic Spherical Oscillator)

1029 **2. Hamilton, W. R.**
1030 *Lectures on Quaternions.*
1031 Hodges and Smith, Dublin (1853).

1032

1033 **Relevant to:** Section 3 (Quaternionic Geometry)

1034 **3. Noether, E.**
1035 *Invariante Variationsprobleme.*
1036 Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen,
1037 235–257 (1918).

1038

1039 **Relevant to:** Section 4 (Time-Independent Phase Equilibrium)

1040 **4. Dirac, P. A. M.**
1041 *The Principles of Quantum Mechanics.*
1042 Oxford University Press (4th ed., 1958).

1043

1044 **Relevant to:** Sections 3–5 (Quantum States and Eigenvalue Structures)

1045
1046 **5. Penrose, R.**
1047 *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe.*
1048 Jonathan Cape (2004).

1049 **Relevant to:** Sections 2–6 (Geometry, Spacetime, and Mathematical Structures)

1050
1051 **6. Ryoo, J. K.**
1052 *COD Standard Model Based on the Complex Quaternionic Spherical Oscillator.*
1053 InnoLab Science Institute (2026).

1054 **Relevant to:** Supplementary Information 1–2.

1055

1056

1057

1058 **Supplementary Information 1**

1059 **승산불변 기하 기반의 고유 질량과 위상반경 구조**

1060

1061 **S1. 승산불변 기하 구조 (Multiplicative-Invariant**
1062 **Geometry)**

1063 COD에서는 모든 질량이 보편적인 승산불변 관계를 만족한다고 정의한다.

1064 $M / M_T = r_0 / R$

1065 또는

1066 $M \cdot R = M_T \cdot r_0$

1067 따라서,

1068 $r_0 = (R / M_T) M$

1069 를 얻는다.

1070 여기서

- 1071 • M : 질량의 고유 질량(Intrinsic Mass)
- 1072 • M_T : COD 전역 기준질량(Global Reference Mass)
- 1073 • R : COD 전역 기준반경(Global Reference Radius)
- 1074 • r_o : 질량의 고유 위상반경(Intrinsic Phase Radius)

1075 이다.

1076 고유 위상반경 r_o 는 승산불변에 의해 결정되는 질량의 고유한 기하학적
1077 기준반경이다.

1078 이는 질량과 전역 위상공간 사이의 자기정합 관계를 나타내며, 모든 안정된
1079 질량은 이 관계를 만족하는 고유 위상반경을 갖는다.

1080 COD에서는 질량의 순수 응축 기준반경(Pure Mass Reference Radius)을

1081 $r_s = 2GM / c^2$

1082 로 정의한다.

1083 고유 위상반경은 순수 질량 기준반경과 다음의 관계를 갖는다.

1084 $r_o = \sqrt{3} r_s$

1085 즉,

1086 고유 위상반경은 순수 질량 기준반경을 둘러싸는 복소 쿼터니언 위상장의 기하
1087 구조를 포함한 반경이다.

1088

1089 S2. COD 전역 기준쌍의 물리적 의미

1090 COD 의 전역 폐합식은
 1091 $c^2 = 2\sqrt{3} \cdot G M_T / R$
 1092 이며,
 1093 이는 다음과 같이 표현할 수 있다.
 1094 $M_T / R = c^2 / (2\sqrt{3} G)$
 1095 COD 에서는
 1096 빛의 전파 구조를 나타내는 자연상수 c 와
 1097 중력 구조를 나타내는 자연상수 G 가
 1098 공동으로 우주의 승산불변 기하를 결정한다.
 1099 전자, 양성자 및 중성자의 공동 자기정합 조건을 적용하면
 1100 COD 의 전역 기준쌍은
 1101 $M_T, COD = 1.7028151007 \times 10^{53} \text{ kg}$
 1102
 1103 $R_COD = 4.3804873821 \times 10^{26} \text{ m}$
 1104 으로 결정된다.
 1105 즉,
 1106 빛의 속도 c 는 우주의 전역 기준반경을 결정하고,
 1107 중력상수 G 는 이에 대응하는 전역 기준질량을 결정한다.
 1108 이 두 상수는 함께 시간독립 위상평형을 만족하는 우주의 전역 승산불변 기하를
 1109 형성한다.
 1110
 1111

1112

1113 **S3. 태양계의 승산불변 검증**

1114 앞 절에서 얻어진 COD 전역 기준쌍

1115 $M_T = 1.7028151007 \times 10^{53} \text{ kg}$

1116

1117 $R = 4.3804873821 \times 10^{26} \text{ m}$

1118 을 이용하여,

1119 대표적인 태양계 천체에 대해

1120 $M / M_T = r_0 / R$

1121 의 승산불변 관계를 검증하였다.

1122

1123 **Table S1. 대표적인 태양계 천체에 대한 승산불변 검증**

Body	Mass M (kg)	Schwarzschild radius r_s (m)	$r_0 = \sqrt{3} \cdot r_s$ (m)	M/M_T	r/R	Ratio	Error
Mercury	3.301×10^{23}	4.9028×10^{-4}	8.4918×10^{-4}	1.9386×10^{-30}	1.9386×10^{-30}	1.0	-0.000000%
Venus	4.867×10^{24}	7.2286×10^{-3}	1.2520×10^{-2}	2.8582×10^{-29}	2.8582×10^{-29}	1.0	-0.000000%
Earth	5.972×10^{24}	8.8698×10^{-3}	1.5363×10^{-2}	3.5071×10^{-29}	3.5071×10^{-29}	1.0	-0.000000%
Mars	6.417×10^{23}	9.5307×10^{-4}	1.6508×10^{-3}	3.7685×10^{-30}	3.7685×10^{-30}	1.0	-0.000000%
Jupiter	1.898×10^{27}	2.8190	4.8826	1.1146×10^{-26}	1.1146×10^{-26}	1.0	-0.000000%
Saturn	5.683×10^{26}	0.84406	1.4620	3.3374×10^{-27}	3.3374×10^{-27}	1.0	-0.000000%
Uranus	8.681×10^{25}	0.12893	0.22332	5.0980×10^{-28}	5.0980×10^{-28}	1.0	-0.000000%
Neptune	1.024×10^{26}	0.15209	0.26342	6.0136×10^{-28}	6.0136×10^{-28}	1.0	-0.000000%
Sun	1.989×10^{30}	2954.1	5116.7	1.1681×10^{-23}	1.1681×10^{-23}	1.0	-0.000000%

1124

1125 Table1 에서 보듯이,

1126 모든 태양계 천체는

1127 $M / M_{\text{T}} = r_0 / R$

1128 을 수치적으로 동일하게 만족한다.

1129 이는 질량의 크기와 무관하게

1130 모든 중력계가 동일한 승산불변 기하 구조를 공유함을 의미한다.

1131 따라서

1132 고유 위상반경은

1133 국소 질량과 우주의 전역 위상공간을 연결하는 보편적인 기하학적 척도로
1134 해석된다.

1135

1136 S4. 복소 쿼터니언 위상껍질의 기하 구조

1137 세 개의 직교하는 쿼터니언 기저는

1138 $|i + j + k| = \sqrt{3}$

1139 의 기하학적 관계를 만족한다.

1140 COD에서는 이 값을

1141 순수 질량 상태를 둘러싸는

1142 복소 쿼터니언 위상껍질(Complex Quaternionic Phase Shell)의

1143 고유 기하 고유값으로 해석한다.

1144 즉,

1145 $\lambda_{\text{Q}} = \sqrt{3}$

1146 를

1147 복소 쿼터니언 위상껍질의 기하 고유값으로 정의한다.

1148 $\sqrt{3}$ 은 새로운 길이를 생성하는 계수가 아니라,

1149 순수 질량 상태를 둘러싸는 복소 쿼터니언 위상껍질의

1150 보편적인 기하 구조를 나타내는 고유값이다.

1151 복소 쿼터니언 위상껍질은

1152 주변 복소 쿼터니언 위상장이 형성하는

1153 공간의 고유한 기하학적 자유도를 나타낸다.

1154 따라서 공간은 독립적인 실체가 아니라,

1155 복소 쿼터니언 위상장이 만들어내는 기하학적 자유도로 이해된다.

1156 순수 질량 기준반경과 위상반경은

1157 $r_0 = \sqrt{3} r_s$

1158 의 관계를 만족한다.

1159 반대로

1160 $r_s = (1/\sqrt{3}) r_0$

1161 이다.

1162 여기서

1163 $\lambda_Q^{-1} = 1/\sqrt{3}$

1164 는 위상껍질을 순수 질량 기준상태로 정규화하는

1165 상보적 정규화 고유값이다.

1166 따라서

1167 $\lambda_Q \lambda_{Q^{-1}} = 1$

1168 의 승산불변 관계가 성립한다.

1169 즉,

1170 $\sqrt{3}$ 과 $1/\sqrt{3}$ 은

1171 복소 쿼터니언 위상껍질을 구성하는

1172 상보적 기하 고유값 쌍이다.

1173
1174

1175 S5. 극한 위상 정규화 구조: 블랙홀

1176 앞에서 정의한 질량-위상 기하는

1177 블랙홀의 극한 응축 상태를 자연스럽게 설명한다.

1178 COD 에서 블랙홀은 새로운 기하 구조가 아니라,

1179 복소 쿼터니언 위상껍질이

1180 순수 질량 기준상태와 완전히 자기정렬된

1181 극한 위상평형 상태이다.

1182 질량 응축이 증가함에 따라

1183 복소 쿼터니언 위상장은 점진적으로 자기정합을 이루며,

1184 위상차는

1185 $\Delta\Phi \rightarrow 0$

1186 으로 수렴한다.

1187 이에 따라

1188 복소 쿼터니언 위상겉질이 갖는

1189 공간의 기하학적 자유도는

1190 점차 순수 질량 기준상태로 정규화되며,

$$\begin{array}{lcl} 1191 & r_0 & \\ 1192 & \times (1/\sqrt{3}) & \\ 1193 & \downarrow & \\ 1194 & r_s & \end{array}$$

1195 로 수렴한다.

1196 즉,

$$1197 \quad \sqrt{3} \times (1/\sqrt{3}) = 1$$

1198 의 승산불변 폐합이 이루어진다.

1199 이 과정은

1200 위상겉질이 사라지는 것이 아니라,

1201 복소 쿼터니언 위상겉질이 갖는 공간의 기하학적 자유도가

1202 순수 질량 상태와 완전히 자기정렬되는 과정이다.

1203 COD에서는 이러한 극한 자기정합 상태를

1204 6π Complete Phase Closure

1205 로 정의한다.

1206 따라서 블랙홀은
1207 복소 쿼터니언 위상겉질이 완전히 정규화되어
1208 순수 질량 기준기하만 남게 되는
1209 시간독립 위상평형의 극한 응축 상태로 이해된다.

1210

1211 S5. 상대성이론의 존재론적 해석

1212 동일한 승산불변 기하는 상대성이론에 대한 존재론적 재해석의 가능성을
1213 제시한다.

1214 보존되는 물리량은 **고유 질량**이며,
1215 질량을 둘러싼 **위상 겉질**은 주변 위상장의 구조에 따라 적응적으로 변화한다.

1216 즉,

1217 고유 질량(불변)
1218 ↓
1219 가변 위상반경
1220 ↓
1221 관측되는 시공간 기하
1222 의 구조를 가진다.

1223 이 관점에서 상대성이론은 **질량 자체의 상대성**이 아니라,
1224 **개별 질량체를 둘러싼 위상장의 상대적 기하 표현**으로 이해된다.

1225 즉, 서로 다른 중력장과 운동 상태에서는 동일한 고유 질량에 대해서도 주변
1226 위상장의 기하 구조가 달라지며,

1227 그 결과 서로 다른 시공간 좌표계가 형성된다.

1228 따라서 COD 는 상대성이론의 수학적 구조를 불변 질량에 대응하는 적응적
 1229 위상장의 기하학적 표현으로 재해석한다.

1230 본 연구에서는 이러한 존재론적 해석의 기본 구조만을 제시하며, 이에 대한
 1231 수학적 전개와 일반상대성이론과의 체계적인 비교는 별도의 논문에서 다룰
 1232 예정이다.

1233

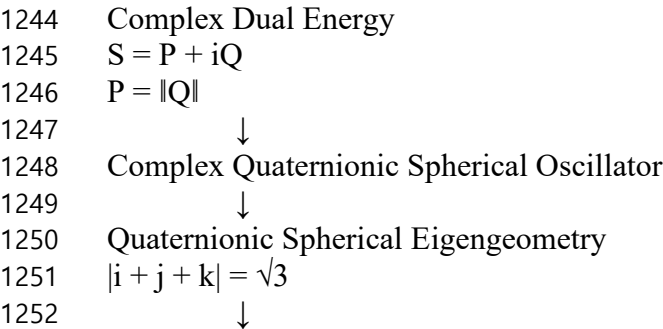
1234 **Supplementary Note 2**

1235 **COD 표준모델의 기하학적 질량 생성 구조**

1236 본 보충자료는 COD 표준모델에서 전자, 양성자 및 중성자의 질량 고유값이
 1237 하나의 공통된 시간독립 위상평형과 승산불변 기하 구조로부터 어떻게
 1238 생성되는지를 단계적으로 제시한다.

1239 COD 에서 질량은 독립적으로 주어지는 기본량으로 취급되지 않는다. 대신
 1240 질량은 복소 쌍대에너지, 복소 쿼터니언 구형진동자의 자기조직화, 쿼터니언 구형
 1241 고유기하, 승산불변, 그리고 시간독립 위상평형 변분조건이 공동으로 선택하는
 1242 기하학적 응축 고유모드로 해석된다.

1243 전체 유도 구조는 다음과 같다.



1253 Multiplicative-Invariant Geometry
 1254 $M_{\text{mode}} / M_T = r_{0_mode} / R$
 1255 ↓
 1256 Time-Independent Phase-Equilibrium Variational Principle
 1257 $\Delta[\sum K_{ij}(\Phi_i - \Phi_j)^2] = 0$
 1258 $\sum_j K_{ij} \sin(\Phi_j - \Phi_i) = 0$
 1259 ↓
 1260 Global Closure
 1261 $c^2 = 2\sqrt{3} G M_T / R$
 1262 ↓
 1263 COD Global Reference Pair
 1264 M_T, R
 1265 ↓
 1266 Universal Mass Generation
 1267 ↓
 1268 Electron / Proton / Neutron

1269 이 계층은 Supplementary Note 에 이미 제시된 기하학적 생성구조를 질량 생성
 1270 논리에 맞게 하나의 흐름으로 압축한 것이다.

1272 Supplementary 2.1

1273 COD 표준모델의 기하학적 질량 생성

1274 2.1.1 복소 쌍대에너지와 복소 쿼터니언 구형진동자

1275 COD 의 출발점은 다음의 복소 쌍대에너지 구조이다.

1276 $S = P + iQ$

1277 위상평형에서는

1278 $P = \|Q\|$

1279 가 성립한다.

1280 여기서 P 는 전역적 실수 에너지 구조를, Q 는 국소 쿼터니언 위상 자유도를
 1281 나타낸다.

1282 안정된 물리적 존재는 이러한 복소 쌍대에너지 성분이 자기정합적으로 폐합된
 1283 **복소 쿼터니언 구형진동자(Complex Quaternionic Spherical Oscillator)**로 정의된다.
 1284 이러한 존재론적 출발점은 현재 Supplementary Note 에서도 질량 생성계층의 첫
 1285 단계로 제시되어 있다.

1286 세 개의 서로 직교하는 쿼터니언 축은

1287 $|i + j + k| = \sqrt{3}$

1288 의 기하학적 관계를 만족한다.

1289 따라서

1290 $\lambda_Q = \sqrt{3}$

1291 은 복소 쿼터니언 구형기하의 기본 고유값으로 취급되며,

1292 $\gamma_Q = \sqrt{3} / 2$

1293 는 질량 생성식에 사용되는 쿼터니언 위상평형 계수이다.

1294

1295 2.1.2 승산불변 질량-위상반경 대응

1296 모든 질량모드는 전역 기준질량 및 전역 기준반경과 다음의 승산불변 관계를
 1297 갖는다.

1298 M_{mode} / M_T
 1299 $=$
 1300 $r_{0\text{mode}} / R$

1301 또는

1302 $M_{\text{mode}} \cdot R$
 1303 $=$
 1304 $M_T \cdot r_{0\text{mode}}$

1305 이다.

1306 따라서

1307 r_o_mode
1308 $=$
1309 $(R / M_T) M_mode$

1310 가 된다.

1311 여기서 r_o_mode 는 해당 질량모드의 **고유 위상반경(Intrinsic Phase Radius)**이다.

1312 이 관계는 국소 질량과 전역 위상공간을 동일한 기하비로 연결하며, COD 질량
1313 생성구조의 전역-국소 대응축을 형성한다. 현재 Supplementary Note 에서도 이
1314 승산불변 관계가 중심 기하식으로 사용되고 있다.

1315

1316 2.1.3 시간독립 위상평형 변분조건

1317 COD 에서 질량모드는 시간진화 방정식에 의해 선택되지 않는다. 질량모드는
1318 **시간독립 위상평형 조건**에 의해 선택된다.

1319 기본 변분조건은

1320
$$\Delta[\sum K_{ij}(\Phi_i - \Phi_j)^2] = 0$$

1321 이며, 이에 대응하는 위상평형 조건은

1322
$$\sum_j K_{ij} \sin(\Phi_j - \Phi_i) = 0$$

1323 이다.

1324 이 관계들은 구성 위상성분 사이의 불균형이 제거되고 전체 복소 쿼터니언
1325 구조가 자기정합 상태에 도달하는 기하학적 평형을 나타낸다.

1326 따라서 COD 에서 질량 생성은 입자가 시간적으로 누적되는 과정이 아니라,
1327 위상기하가 허용하는 안정된 응축 고유모드의 선택으로 해석된다.

1328

1329 **2.1.4 전역 위상평형 폐합과 COD 전역 기준쌍**

1330 복소 쿼터니언 고유기하와 승산불변 위상평형은 다음의 전역 폐합관계로
1331 이어진다.

1332 c^2
1333 $=$
1334 $2\sqrt{3} G M_T / R$

1335 따라서

1336 M_T / R
1337 $=$
1338 $c^2 / (2\sqrt{3} G)$

1339 이다.

1340 COD에서는 정밀하게 계측된 자연상수 c 와 G 를 우주의 전역 질량-공간비를
1341 고정하는 기준량으로 사용한다.

1342 전자, 양성자 및 중성자 질량 고유모드의 공동 자기정합 조건을 적용하면 현재
1343 COD의 전역 기준쌍은

1344 M_{T_COD}
1345 $=$
1346 $1.7028151007 \times 10^{53} \text{ kg}$
1347
1348 R_{COD}
1349 $=$
1350 $4.3804873821 \times 10^{26} \text{ m}$

1351 이다.

1352 이 값들은 현재 Supplementary Note의 주 계산부에서 사용되는 기준값이다.

1353 이 해석에서 c 는 주로 전역 공간척도를 고정하고, G 는 시간독립 위상평형
1354 폐합을 만족하기 위해 필요한 대응 전역 질량척도를 결정한다.

1355

Supplementary 2.2

보편 질량 생성식의 기하학적 유도

COD 질량 생성구조의 핵심은 승산불변 질량비를 구형 기하와 모드별 지수형
응축작용으로 표현하는 데 있다.

보편 질량 생성식은

$$\begin{aligned} & M_{\text{mode}} / M_{\text{T_COD}} \\ &= \\ & r_{\text{o_mode}} / R_{\text{COD}} \\ &= \\ & (S_{\text{radial}} / 4) \\ & \exp(-S_{\text{radial}} \gamma_Q C_{\text{mode}}) \end{aligned}$$

이다.

따라서

$$\begin{aligned} & M_{\text{mode}} \\ &= \\ & M_{\text{T_COD}} \\ & (S_{\text{radial}} / 4) \\ & \exp(-S_{\text{radial}} \gamma_Q C_{\text{mode}}) \end{aligned}$$

가 된다.

각 항은 서로 다른 기하학적 역할을 갖는다.

S_{radial}
=
Universal Radial Geometry
보편 구형 반경 기하
 γ_Q
=
Quaternionic Equilibrium Coefficient
쿼터니언 위상평형 계수

1386 C_{mode}
 1387 =
 1388 Local Condensation Eigenstructure
 1389 국소 응축 고유구조
 1390
 1391 S_{mode}
 1392 =
 1393 Mode Condensation Action
 1394 모드 응축 작용량

1395 이 명명체계는 현재 Supplementary Note 에도 정리되어 있다.

1396 모드 응축작용은

1397 S_{mode}
 1398 =
 1399 $S_{radial} \gamma_Q C_{mode}$

1400 로 쓸 수 있으므로, 보편 질량 생성식은 보다 간결하게

1401 M_{mode}
 1402 =
 1403 $M_T COD$
 1404 $(S_{radial} / 4)$
 1405 $\exp(-S_{mode})$

1406 로 표현된다.

1407 여기서 핵심은 모든 질량모드가 동일한 전역식에서 생성되고, 서로 다른 입자
 1408 사이의 차이는 오직 C_{mode} 의 기하학적 선택구조를 통해 나타난다는 점이다.

1409

1410 2.2.1 전자 기준모드

1411 전자는 질량 생성계층에서 최소 자기정합 기준모드로 정의된다.

1412 $G_e = 1$

1413 이며,

1414 $C_e = \beta_e = 47/48$

1415 이다.

1416 따라서

1417 $M_e \text{COD}$

1418 =

1419 $M_T \text{COD}$

1420 $(S_{\text{radial}} / 4)$

1421 $\exp[-S_{\text{radial}} \gamma_Q (47/48)]$

1422 가 된다.

1423 현재 계산값은

1424 $M_e \text{COD}$

1425 =

1426 $9.1110758194 \times 10^{-31} \text{ kg}$

1427 이며, 상대차이는

1428 δ_e

1429 =

1430 $+0.0185754\%$

1431 이다.

1432 전자 고유 위상반경은 승산불변식으로부터

1433 r_{0_e}

1434 =

1435 R_{COD}

1436 $(M_e \text{COD} / M_T \text{COD})$

1437 으로 주어지며,

1438 r_{0_e}

1439 =

1440 $2.3438218658 \times 10^{-57} \text{ m}$

1441 이다.

1442

1443

Supplementary 2.3

1444

재귀적 기하 선택구조

1445

전자 기준모드 이후 양성자와 중성자는 동일한 보편 질량 생성구조 위에

1446

추가적인 재귀적 쿼터니언 기하가 형성되는 응축모드로 정의된다.

1447

모드별 응축 고유구조는

1448

C_{mode}

1449

=

1450

β_e

1451

-

1452

$\ln(G_{\text{mode}})/(S_{\text{radial}} \gamma_Q)$

1453

로 표현된다.

1454

이를 보편 질량 생성식에 대입하면

1455

M_{mode}

1456

=

1457

$M_e G_{\text{mode}}$

1458

의 재귀적 질량배율 구조가 얻어진다.

1459

따라서 G_{mode} 는 독립적으로 도입된 경험적 질량비가 아니라, 해당 질량모드를

1460

선택하는 재귀적 기하 구조를 나타낸다.

1461

양성자

1462

양성자의 재귀적 기하구조는

1463

G_p

1464

=

1465

$3 + 3\Lambda^2 + B\Lambda^3$

1466

이다.

1467 현재 사용값

1468 $\Lambda = 11$

1469 $B = 53/48$

1470 을 대입하면

1471 G_p

1472 $=$

1473 1835.6458333333

1474 이다.

1475 따라서

1476 C_p

1477 $=$

1478 $47/48$

1479 $-$

1480 $\ln(G_p)/(S_{\text{radial}} \gamma_Q)$

1481 이고,

1482 M_p_{COD}

1483 $=$

1484 $M_e_{\text{COD}} G_p$

1485 또는 동등하게

1486 M_p_{COD}

1487 $=$

1488 M_T_{COD}

1489 $(S_{\text{radial}}/4)$

1490 $\exp(-S_{\text{radial}} \gamma_Q C_p)$

1491 이다.

1492 계산 결과는

1493 M_p_{COD}

1494 $=$

1495 $1.6724708365 \times 10^{-27} \text{ kg}$

1496 이며,

1497 δ_p

1498 =

1499 -0.00903309%

1500 이다.

1501 양성자 고유 위상반경은

1502 r_{0p}

1503 =

1504 $4.3024268421 \times 10^{-54} \text{ m}$

1505 이다.

1506 **중성자**

1507 중성자의 재귀적 기하구조는

1508 G_n

1509 =

1510 $3 + 3\Lambda^2 + (B + \varepsilon)\Lambda^3$

1511 이며,

1512 $\varepsilon = 1/528$

1513 을 적용하면

1514 G_n

1515 =

1516 1838.1666666667

1517 이다.

1518 따라서

1519 C_n

1520 =

1521 $47/48$

1522 —
1523 $\ln(G_n)/(S_{\text{radial}} \gamma_Q)$

1524 이고,

1525 M_n_{COD}
1526 =
1527 $M_e_{\text{COD}} G_n$

1528 이다.

1529 계산 결과는

1530 M_n_{COD}
1531 =
1532 $1.6747675869 \times 10^{-27} \text{ kg}$

1533 이며,

1534 δ_n
1535 =
1536 -0.00954750%

1537 이다.

1538 중성자 고유 위상반경은

1539 r_{0n}
1540 =
1541 $4.3083352264 \times 10^{-54} \text{ m}$

1542 이다.

1543

1544 **Supplementary 2.4**

1545 **COD 표준모델 기반 질량 생성 결과**

1546 이 단계에서 Table S2 는 앞선 유도과정을 반복하지 않고 결과를 요약하는 표의
 1547 역할만 한다.

1548 **Table S2. COD Standard Model Based Mass–Energy Generation Structure**

Category	COD Expression	COD Mass Value	Experimental / Standard Reference Value	Difference	Interpretation
Global Reference Pair	$M_T_COD / R_COD = c^2/(2\sqrt{3}G)$	$M_T_COD = 1.7028151007 \times 10^{53} \text{ kg}$	—	—	공동 자기정합 승산불변 전역 기준쌍
Universal Mass Generation	$M_mode/M_T_COD = r_o_mode/R_COD = (S_radial/4)\exp(-S_radial \gamma_Q C_mode)$	—	—	—	모든 질량모드에 공통인 보편 생성식 최소
Electron	$G_e = 1, C_e = 47/48$	$9.1110758194 \times 10^{-31} \text{ kg}$	$9.1093837139 \times 10^{-31} \text{ kg}$	$+0.018575\%$	자기정합 질량 응축모드
Proton	$G_p = 3 + 3\Lambda^2 + B\Lambda^3 = 1835.6458333333$	$1.6724708365 \times 10^{-27} \text{ kg}$	$1.6726219259 \times 10^{-27} \text{ kg}$	-0.009033%	재귀적 기하 응축 안정모드
Neutron	$G_n = 3 + 3\Lambda^2 + (B+\epsilon)\Lambda^3 = 1838.1666666667$	$1.6747675869 \times 10^{-27} \text{ kg}$	$1.6749275005 \times 10^{-27} \text{ kg}$	-0.009548%	재귀적 중성 완성모드

1549

1550 이 수치들은 현재 파일의 최종 계산부와 대응한다.

1551 세 입자모드의 공동 자기정합 잔차는

1552 RMSE

1553 =

1554 $\sqrt{[(\delta_e^2 + \delta_p^2 + \delta_n^2)/3]}$

1555 이며,
1556 RMSE
1557 =
1558 0.0131377%

1559 이다.

1560 따라서 현재의 COD 전역 기준쌍을 적용하면 세 입자모드의 상대잔차는 모두
1561 $|\delta_{\text{mode}}| < 0.02\%$
1562 범위에 놓인다.

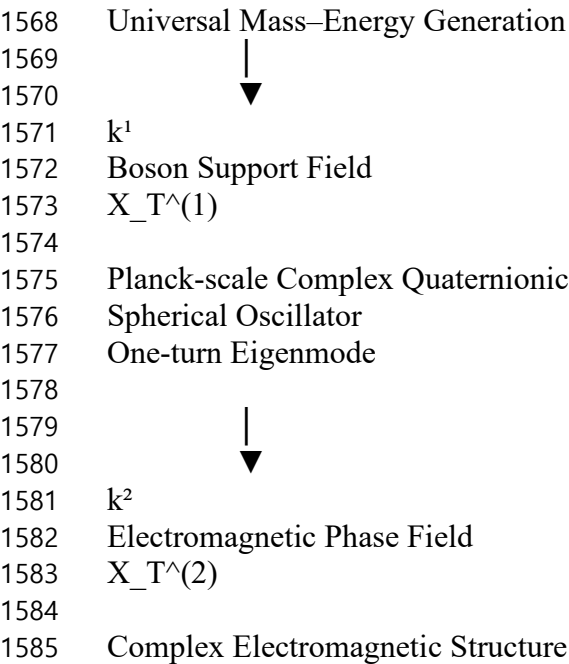
1563

1564 **Supplementary 2.5**

1565 **COD 표준모델의 재귀적 위상계층**

1566 앞서 얻은 보편 질량 생성구조는 입자질량에만 한정되지 않는다.

1567 COD에서는 자연계의 물리 구조를 다음과 같은 재귀적 위상계층으로 확장한다.



1586 derived from
 1587 $S = P + iQ$
 1588 $P = \|Q\|$
 1589
 1590 $\downarrow$
 1591
 1592 k^3
 1593 Mass Condensation Field
 1594
 1595 Electron
 1596 Proton
 1597 Neutron
 1598
 1599 $\downarrow$
 1600
 1601 k^4
 1602 Black-Hole Phase Field
 1603
 1604 Complete Phase Self-Alignment
 1605 $\Delta\Phi \rightarrow 0$

1606 현재 Supplementary Note 에서도 이 계층은 k^1 보손 지지장, k^2 전자기 위상장, k^3
 1607 전자·양성자·중성자의 질량응축장, k^4 블랙홀의 완전 위상 자기정렬로 정리되어
 1608 있다.

1609 다만 현재 단계에서 k^1 및 k^2 의 절대 에너지 고유값은 제안 단계(proposal stage)에
 1610 있으며, 명시적인 수치 질량 생성 검증은 k^3 의 전자, 양성자 및 중성자 모드에
 1611 대해 수행된다. 이 구분 역시 기존 Supplementary Note 에 명시되어 있다.

1613 Supplementary Information 2 의 핵심 결론

1614 COD 표준모델에서 전자, 양성자 및 중성자는 서로 독립된 질량방정식을 필요로
 1615 하지 않는다.

1616 세 모드는 모두 동일한 시간독립 승산불변 질량 생성식

1617 M_{mode}
 1618 $=$
 1619 M_{T_COD}

1620 $(S_{\text{radial}}/4)$
 1621 $\exp(-S_{\text{radial}} \gamma_Q C_{\text{mode}})$
 1622 에 의해 생성된다.
 1623 각 입자모드의 차이는 재귀적 쿼터니언 기하 선택구조
 1624 G_{mode}
 1625 와 이에 따라 결정되는
 1626 C_{mode}
 1627 에서만 발생한다.
 1628 따라서 COD의 질량 생성구조는 다음과 같이 요약된다.
 1629 전역 승산불변 기하
 1630 +
 1631 복소 쿼터니언 구형 고유기하
 1632 +
 1633 시간독립 위상평형
 1634 ↓
 1635 보편 지수형 질량 생성식
 1636 ↓
 1637 모드별 재귀 기하 선택
 1638 ↓
 1639 전자 / 양성자 / 중성자
 1640